

Exercice 1 [8 pts]

Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.

Exercice 2 [12 pts]

1. Montrer que, pour tout réel x on a : $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Dans toute la suite, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-x + 2}{x^2 - 4x + 5}$$

2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses.
4. Préciser l'abscisse du point d'intersection A de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, puis montrer que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A admet pour équation réduite : $y = -x + 2$.
5. Pour tout réel x , on pose : $h(x) = f(x) - (-x + 2)$.
 - a. Vérifier que, pour tout réel x , on a :
$$h(x) = \frac{(x - 2)(x - 2)^2}{x^2 - 4x + 5}$$
 - b. En déduire le tableau de signes de $h(x)$ puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T .

Corrigé

Exercice 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

$\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal du plan, on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 2) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2)^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $-2x^2 - 2x + 4$.

$-2x^2 - 2x + 4$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -2$ et $c = 4$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-2)(4) = 4 + 32 = 36$.

$\Delta > 0$ donc $-2x^2 - 2x + 4$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - \sqrt{36}}{2(-2)} = \frac{2 - 6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + \sqrt{36}}{2(-2)} = \frac{2 + 6}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

D'autre part, on a :

$$f(-2) = \frac{2(-2) + 1}{(-2)^2 + 2} = \frac{-4 + 1}{4 + 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{2(1) + 1}{(1)^2 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
Sens de variation de f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		$-\frac{1}{2}$	1		

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 0$, on obtient : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or,

$$f(0) = \frac{2(0) + 1}{(0)^2 + 2} = \frac{1}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{2(-(0)^2 - 0 + 2)}{((0)^2 + 2)^2} = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$$

On obtient :

$$y = 1(x - 0) + \frac{1}{2}$$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle admet pour équation réduite : $y = x + \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel x on a : $x^2 - 4x + 5 > 0$.

$x^2 - 4x + 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$.

On a : $\Delta < 0$, donc $x^2 - 4x + 5$ n'admet pas de racine réelle.

Règle lorsque $\Delta < 0$: « $ax^2 + bx + c$ est partout du signe de a et ne s'annule jamais ».

Comme $a > 0$ on en déduit que : pour tout réel x , $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Autre rédaction

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - 4x + 5 = (x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$.

Or, un carré est toujours positif ou nul donc : $(x - 2)^2 \geq 0$, puis $(x - 2)^2 + 1 > 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$.

2. Calcul de $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x + 2}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1(x^2 - 4x + 5) - (2x - 4)(-x + 2)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - 4x + 5) - (-2x^2 + 4x + 4x - 8)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 5 + 2x^2 - 4x - 4x + 8}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

3. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses.

Il s'agit de résoudre l'équation $f'(x) = 0$, ou ce qui revient au même, l'équation $x^2 - 4x + 3$.

Or, $x^2 - 4x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$.

On a : $\Delta > 0$ donc $x^2 - 4x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 3.

Autre rédaction

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow (x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

- 4. A point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, préciser l'abscisse de A puis montrer que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A admet pour équation réduite : $y = -x + 2$.**

L'abscisse de A est solution de l'équation $f(x) = 0$, ou encore, ce qui est équivalent, de l'équation : $-x + 2 = 0$ dont l'unique solution est 2 donc : $x_A = 2$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ admet pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 2$, on obtient : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$. Or,

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{(2)^2 - 4(2) + 3}{((2)^2 - 4(2) + 5)^2} = \frac{4 - 8 + 3}{(4 - 8 + 5)^2} = \frac{-1}{1^2} = -1 \\ f(2) &= f(x_A) = y_A = 0 \end{aligned}$$

On obtient : $y = -1(x - 2) + 0$, ou encore : $y = -x + 2$.

La tangente T admet bien pour équation réduite : $y = -x + 2$.

- 5. Pour tout réel x , on pose : $h(x) = f(x) - (-x + 2)$.**

a. Vérifier que, pour tout réel x , on a :

$$h(x) = \frac{(x - 2)(x - 2)^2}{x^2 - 4x + 5}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - (-x + 2) \\ &= \frac{-x + 2}{x^2 - 4x + 5} - \frac{(-x + 2)(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(-x + 2) \times 1 - (-x + 2)(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(-x + 2)[1 - (x^2 - 4x + 5)]}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(-x + 2)(-x^2 + 4x - 4)}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(-x + 2)(-1)(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(x - 2)((x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2)}{x^2 - 4x + 5} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 2)^2}{x^2 - 4x + 5} \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout réel x :

$$h(x) = \frac{(x-2)(x-2)^2}{x^2 - 4x + 5}$$

b. En déduire le tableau de signes de $h(x)$ puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T .

On a vu à la question 1. que, pour tout réel x , $x^2 - 4x + 5 > 0$ donc le signe de $h(x)$ est celui de son numérateur : $(x-2)(x-2)^2$.

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

- $(x-2)^2$ est toujours positif ou nul et ne s'annule que pour $x = 2$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $(x-2)$	$-$	0	$+$
signe de $(x-2)^2$	$+$	0	$+$
signe de $h(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit que :

- sur $] -\infty; 2[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de T
- sur $] 2; +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de T
- $\mathcal{C}_f$ et T se coupent au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2, c'est-à-dire au point A.